

IV. Die Magischen Quadrate

Nachfolgend werden mathematische Strukturen dargestellt, die der sichtbaren Anlage überlagert sind. Ihr Zahlenmaterial ist zwar direkt der sichtbaren Anlage entnommen, ohne jedoch unmittelbar an einer korrespondierenden geistlichen Aussage zu partizipieren. Es handelt sich um gleichzeitige Kompositionen auf einer mathematischen Metaebene. Diese Kompositionen sind wesentlich einfacher als die Kompositionen mit Tönen; es liegt ihnen im Grunde einfache Kombinatorik und Arithmetik zugrunde. Das Besondere ist die Gleichzeitigkeit. Dabei war in der Planung und der weiteren Arbeit am $O=B$ notwendigerweise nicht die Komposition der Zahlen die Variable, sondern diejenige der Töne. Im Verlaufe der nachfolgenden Kapitel wird ersichtlich, wie eng Bach das mathematische Korsett geschnürt hat. Dass er in die Vorlage dieses engen Korsetts hinein noch Musik dieser Qualität hat komponieren können, zeigt seine Genialität. Mit einem Augenzwinkern wird man zwar ab und zu wahrnehmen, dass er musikalische Kompromisse eingehen musste, die auf diese Einengung zurückzuführen sind. Solche Anpassungen werden in erster Linie im Kapitel VI sichtbar. Bedenkt man die Komplexität der gestellten Puzzleaufgabe, kann man jedoch nur staunen, wie Bach die Aufgabe gelöst hat. Die Rede ist hier von der Konstruktion Magischer Quadrate.²⁴⁸ In diesem Kapitel sollen mehrere solcher Quadrate beschrieben werden, deren Existenz im $O=B$ bisher nicht nachgewiesen wurde.²⁴⁹ Ihre Aufdeckung wirft ein völlig neues Licht auf die Fragen der Absicht, der Planung, des Arbeitsablaufs und der Vollendung des $O=B$. Freilich steht die Entdeckung solcher Magischer Quadrate bereits in einer gewissen Tradition, denn die Erforschung von Zahlenfiguren im Werk Bachs ist keineswegs neu. Verschiedene Forscher haben sich bereits kompetent mit diesem Thema beschäftigt und in verschiedenen Werken und Zyklen zahlreiche Magische Figuren nachgewiesen. Thijs Kramer hat in seiner Dissertation, die als Grundlagenarbeit auf diesem Gebiet bezeichnet werden muss, die bisherigen Kenntnisse dargelegt und diese mit vielen eigenen Forschungsergebnissen erweitert.

248 Unter einem Magischen Quadrat versteht man eine quadratische Anordnung von Zahlen, bei der die Zeilen, Spalten und Diagonalen die gleiche Summe bilden. Im strengen Sinne darf jede Zahl nur einmal vorkommen. Bei gematrisch begründeten Quadraten kommt es jedoch zwangsläufig zu Dupla.

249 Kramer, S. 91 ff. vermutet, dass die Magischen Figuren im WTC I die ersten im Werk Bachs sind. Die folgenden Beispiele zeigen, dass es offensichtlich schon frühere gibt.

Maßgeblich und als erste haben sich die beiden Niederländer Henk Dieben und Jacques Bronkhorst mit Zahlenarchitektur und Magischen Figuren befasst, die sie im *Wohltemperirten Clavier 1*, den *Inventionen und Sinfonien* und der *Kunst der Fuge* gefunden haben.²⁵⁰ Bei diesen Magischen Figuren handelt es sich ausschließlich um Magische Rechtecke.²⁵¹ Erst Kramer konnte aus den Magischen Rechtecken Magische Quadrate extrahieren.²⁵²

Vor der Darstellung von Magischen Quadraten im *O=B* sollen hier kurz die Rahmenbedingungen genannt sein, die gegeben sein müssen, damit überhaupt ein Quadrat gebildet werden kann. Eine genaue Anleitung für die Konstruktion von Magischen Quadraten ist in der *Arithmetica integra* von Michael Stifel zu finden, auf die schon im Kapitel *Einleitung* hingewiesen wurde.²⁵³

- Die Anzahl der Summanden (oder 'Termen') muss eine Quadratzahl sein, z. B. 16, 25, 36, 49, 64 etc.
- Die Gesamtsumme der Termen muss durch die Wurzel der Quadratzahl teilbar sein. Diese Wurzelzahl bestimmt die Anzahl der Zeilen und Spalten.

Als erstes Beispiel sei eines der berühmtesten Quadrate angeführt, das sogenannte *Dürer-Quadrat*.²⁵⁴ Es hängt als Bild in Albrecht Dürers Stich *Melencolia I*. Dieser Stich gehört zu seinen großartigsten und rätselhaftesten Werken. Seine reiche Symbolik lässt sich noch immer nur unvollständig deuten.²⁵⁵ An dieser Stelle soll, aus der Fülle herausgegriffen, nur auf die Sonnenuhr über der Sanduhr verwiesen werden, die nur 8 Ziffern enthält und auf die Ziffer 4 weist. Die einschlägige Literatur deutet auch hier die Zahlen im Sinne, wie sie weiter unten in den Kapiteln *Die Reihe der Dreifaltigkeit und irdischen Kreatur*

250 Dieben und Bronkhorst waren ihrerseits angeregt durch die Erkenntnisse von Wilhelm Werker. Siehe Kramer, S. 1.

251 Dargestellt in: Kramer, S. 94 ff.

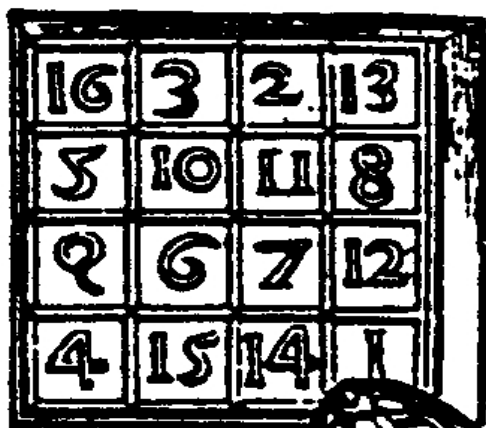
252 Grundlage für die Magischen Rechtecke bildeten die Taktsummenzahlen der 24 Praeludien und 24 Fugen des WTC1. Kramer konnte daraus 3 Magische Quadrate mit je 16 Termen ableiten. Kramer, S. 116 ff.

253 Siehe Anleitung zur Konstruktion von Magischen Quadraten in Stifel A, liber I, Cap. III, S. 24 ff. Auszug in der *Einleitung*.

254 Nach Lassnig ist dieses Quadrat schon bei Luca Pacioli zwischen 1496 und 1508 handschriftlich nachweisbar. Die Bezeichnung "Dürer-Quadrat" ist demnach nicht korrekt. Siehe Lassnig, S. 71.

255 Siehe Schuster, *Melencolia I. Dürers Denkbild*.

und *Die 8er-Reihe* beschrieben werden. Das Blatt *Melencolia I* entstand im Jahre 1514, dem Todesjahr von Dürers Mutter, Barbara Holper. Dürer war damals 43 Jahre alt.



Termenzahl	$T = 16$
Wurzelzahl	$W = 4$
Zeilen / Spalten	$ZS = 4$
Termensumme	$\Sigma = 136$
Konstante	$K = 34$

Facsimile IV.1. Albrecht Dürer, *Melencolia I*. Ausschnitt Magisches Quadrat.



Facsimile IV.2. Albrecht Dürer, *Melencolia I*. 1514.

Das dargestellte 4er-Quadrat, ein sogenanntes Jupiter-Quadrat, ist "hochmagisch".²⁵⁶ Es besteht aus den Zahlen 1–16 und hat die Konstante 34.²⁵⁷ Hochmagisch ist es, weil nicht nur die Zeilen, Spalten und Diagonalen die Konstante 34 haben, sondern auch das Mittel- und die vier Eckquadrate, die Eckfelder, die opponierten Randmittelfelder, die gekippten Quadrate, die Rauten, die gleichgebrochenen Diagonalen und die aufrechten Pfeile.²⁵⁸ Die beiden Eckzahlen unten sind im Zahlenalphabet die Buchstaben D(ürer) A(lbrecht) und die beiden Mittelzahlen unten, 1514, bilden das Todesjahr von Dürers Mutter (1452–1514) und das Entstehungsjahr des Blattes, wie oben erwähnt. Zudem ist die Konstante 34 das Spiegelbild von Dürers damaligem Alter 43.

Als zweites Beispiel soll ein Quadrat dargestellt werden, dessen Konstruktion Bach mit Hilfe der 27 Taktzahlen des 3. Teils der *Clavierübung* ermöglicht und das Thijs Kramer entdeckt hat.²⁵⁹ Diese Quadratkonstruktion erfolgte rund 30 Jahre später als die nachfolgend gezeigten Beispiele aus dem *O=B*. Die Vorgehensweise ist jedoch dieselbe. Da 27 keine Quadratzahl ist und somit keine Quadratkonstruktion zulässt, wurden von den 27 Taktzahlen 9 Gruppen mit je 3 Taktzahlen gebildet. Auf diese Weise ist die Konstruktion eines 3er-Quadrates möglich. Diese 9 Zahlen lauten:

170, 177, 184, 198, 205, 212, 226, 233 und 240

Termenzahl:	T =	9	
Wurzelzahl:	W =	3	
Summe der 9 Taktsummengruppen:	Σ =	1845	(= 45 x 41)
Konstante: 1845:3 = 615	K =	615	(= 15 x 41)

256 Die 3er- bis 9er-Quadrate wurden spätestens seit Paracelsus den sieben Planeten Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus, Merkur und Mond zugeordnet und es wurden ihnen magische Kräfte nachgesagt. Siehe Paracelsus, *Archidoxa magica: De Sigillis Planetarum*. Abbildung in Appendix IV *Ergänzende Texte und Bilder*.

257 Nach de Haas gibt es 1232 verschiedene 4er-Quadrate. Siehe de Haas.

258 Weitere Feinheiten ausführlich beschrieben bei Kramer, S. 67.

259 Siehe Kramer, S. 184 f.

212 226 177

170 205 240

233 184 198

Tabelle IV.1. Taktsummenquadrat 1 im 3. Teil der *Clavierübung*.

Auf den ersten Blick mag die Problemstellung etwas kompliziert wirken. Im Grunde handelt es sich jedoch um eine Puzzleaufgabe, die nur ein Minimum an mathematischen Kenntnissen voraussetzt. So sind Magische Quadrate mit etwas Übung in wenigen Minuten im Kopf auszurechnen.²⁶⁰ Komplizierter wird es hingegen, wenn schwierige Parameter vorgegeben sind. Dann kann die Planung einer solchen Figur hohe Anforderungen stellen. Im Kontext dieser Arbeit heißt dies, dass nicht die Konstruktion der Quadrate das Hauptproblem darstellte, sondern die Bereitstellung des dazu notwendigen Zahlenmaterials. Üblicherweise gilt als Grundbedingung für die Konstruktion von Magischen Quadraten, dass die einzelnen Termen nur einmal vorkommen dürfen. Sogenannte Dupla sind an sich nicht erlaubt. Ausnahmen müssen beispielsweise dann toleriert werden, wenn die Termen noch in andere Konstruktionen eingebunden und somit nicht frei wählbar sind. Dies betrifft alles Zahlenmaterial, das Bach aus dem Zahlenalphabet gewann. Hier sind wegen nur 24 möglicher Zahlen Dupla unvermeidlich und kommen daher häufig vor.²⁶¹ Bevor nun die gefundenen Quadrate dargestellt werden sollen, müssen zwei Problemfragen angesprochen werden, die erst in den nachfolgenden Kapiteln näher behandelt werden können. Beide Probleme spielen nämlich direkt in die Konstruktion der nachfolgenden Quadrate hinein. Das eine Problem betrifft die Wiederholungsfrage in BWV 603 *Puer natus*, das andere das Fragment von *O Traurigkeit, o Herzeleid*.²⁶² Während in den folgenden Ausführungen die später im Kapitel VI beschriebene und postulierte Lösung der Frage der Schlussbildung von BWV 603 tatsächlich bestätigt wird,²⁶³ klärt sich auch die Frage, welche Bewandnis es mit dem Fragment *O Traurigkeit, o Herzeleid* hat.

260 Von Kramer auf S. 87 ff. launig demonstriert.

261 Ausnahmen bilden hier das Positionenquadrat und v.a. das Seitenzahlenquadrat.

262 Siehe im Kapitel VI.3 *Die Fibonacci-Folge* BWV 603.

263 Der Tenor von BWV 603 schließt mit h/b, wie der Custos im Autograph andeutet. Siehe Kapitel VI.3 *Die Fibonacci-Folge*.

IV.1. Das Taktsummenquadrat

Als Zahlenmaterial dient auch hier, wie in den meisten vergleichbaren Fällen, etwa im *Wohltemperirten Clavier* oder in der *Kunst der Fuge*, die Anzahl der Takte der einzelnen Werke.²⁶⁴ Im Falle des $O=B$ kommt bezüglich der Verwendung der Taktzahlen – unter der Voraussetzung, dass stets das ganze Material verwendet werden soll – nur *eine* Anordnung für ein Magisches Quadrat in Frage, nämlich die Zählung der 49 effektiv komponierten Choralstrophen. Dies bedeutet, dass die drei Verse von *Christ ist erstanden*²⁶⁵ und die beiden Varianten von *Liebster Jesu, wir sind hier* einzeln gezählt werden müssen und dass auch das Fragment *O Traurigkeit, o Herzeleid* eingerechnet werden muss. Auf diese Weise werden 49 Termen erreicht, die die Konstruktion eines 7er-Quadrates ermöglichen. Dabei zeigt sich, dass zum Erreichen einer quadratfähigen Gesamtaktsumme erstens BWV 603 mit vier Strophen zu rechnen ist und zweitens das Fragment *O Traurigkeit, o Herzeleid* Fragment bleiben muss.²⁶⁶

Das Hauptproblem zur Bildung eines Magischen Quadrates ist normalerweise, die Grundvoraussetzung einer Gesamtsumme zu schaffen, die durch die Wurzelzahl der Anzahl der Termen teilbar ist. Dieses Problem entschärft Bach jedoch im Falle des Taktsummenquadrates, indem er eine der Termen als Variable einsetzt. Durch das bewusste Offenlassen der Länge, nämlich der Anzahl der Wiederholungen von *Puer natus*, gewinnt Bach die Möglichkeit etwas größerer Flexibilität zum Erreichen einer solchen Gesamtsumme. Das Taktsummenquadrat hat 49 Termen. Die Gesamtsumme muss also durch 7 teilbar sein, damit je 7 Zeilen und Spalten gebildet werden können. Ist die Gesamtsumme der Taktzahlen aller 49 Choralstrophen jedoch nicht durch 7 teilbar, kann mit Hilfe von Wiederholungen von *Puer natus* eine durch 7 teilbare Summe erreicht werden. Dabei müsste *Puer natus* maximal sechsmal wiederholt werden.²⁶⁷ Theoretisch wäre es deshalb möglich, dass mit Hilfe der 10 Strophen von *Puer natus* zwei Gesamtsummen erreicht werden, die durch 7 teilbar sind. Damit wäre die Basis für zwei solche Quadrate gegeben. Mit insgesamt vier zu spielenden Strophen wird diese Grund-

264 Kramer, S. 91 ff., dargestellt an *WTC I, Clavierübung III, Magnificat* und *Kunst der Fuge*.

265 Sie sind explizit überschrieben mit Versus 1, 2 und 3.

266 Eine Beurteilung dieses Sachverhalts erfolgt im Kapitel IV.5.

267 Voraussetzung ist allerdings, dass die Taktsumme von *Puer natus* nicht durch 7 teilbar ist. Dies ist bei *Puer natus* der Fall. Das Lied hat 16 Takte und 10 Strophen.

voraussetzung aber nur einmal erreicht.²⁶⁸ Durch die dreifache Wiederholung, das Spielen also von insgesamt vier Strophen, entsteht mit 64 Takten jedoch eine relativ große Terme, welche die Konstruktion des Quadrates erschwert. Auch wenn Bach eine Lösung des Problems mit den genannten Wiederholungen gewissermaßen erzwingt, so bleibt die Konstruktion dieses Quadrates dennoch recht knifflig. Gleichwohl ist seine Bedeutung bezüglich der Planung des O=B vermutlich relativ gering.²⁶⁹ Die einzelnen Choralvorspiele haben folgende Taktzahlen:²⁷⁰

BWV-Nummer^{Taktzahl}

599¹⁰, 600²⁶, 601²⁰, 602⁹, 603⁶⁴, 604¹¹, 605²⁴, 606¹⁰, 607¹⁸, 608³⁷, 609¹⁰, 610¹⁹, 611¹⁵, 612²³, 613¹⁶, 614¹², 615⁶³, 616¹⁵, 617²⁴, 618²⁷, 619¹⁶, 620²⁵, 621¹¹, 622²⁴, 623¹⁸, 624¹⁶, O Tr.¹, 625¹⁶, 626⁹, 627^{18/20/23}, 628¹⁶, 629¹⁹, 630²⁷, 631⁸, 632¹⁷, 633²⁰, 634²⁰, 635²⁰, 636¹², 637¹⁶, 638¹⁴, 639¹⁸, 640¹⁰, 641⁹, 642¹⁵, 643¹⁶, 644¹⁰.

Das Taktsummenquadrat hat folgende Struktur:

Anzahl der Termen (= Taktsummen):	T	=	49
Wurzelzahl:	W	=	7
Summe der 49 Taktsummen:	Σ	=	917
Konstante: 917:7=131	K	=	131 ²⁷¹

268 Um eine nächste durch 7 teilbare Summe zu erreichen, müsste *Puer natus* 7 weitere Male wiederholt werden. Dies bedeutet, dass das Stück insgesamt 11-mal wiederholt werden müsste. Das Lied hat jedoch nur 10 Strophen.

269 Siehe Kapitel IV.5 *Die Bewertung der Magischen Quadrate*.

270 Einzelne Vorspiele haben überzählige Schläge. Diese sind nicht Bestandteil eigener Takte und werden deshalb für die Ermittlung der Taktsumme nicht gezählt. Siehe Appendix III *Tabelle der Parameter aller Choräle*.

271 Die Taktzahlen der Choräle können außerdem der Tabelle im Appendix III entnommen werden, wo auch alle übrigen bisher bekannten arithmetischen Spielereien aufgelistet sind. Es soll an dieser Stelle nicht verschwiegen werden, dass die Zählung der Taktzahlen in der NBA unlogisch und verwirrend ist. Während bei (willkürlich) ausgeschriebenem Wiederholungen die Taktzahlen weitergezählt werden, werden sie nach Wiederholungszeichen ignoriert.

Von den möglichen Lösungen sei hier eine Variante dargestellt:

$$\begin{array}{cccccccc}
 23^{612} & 10^{599} & 27^{618} & 16^{613} & 24^{605} & 20^{601} & 11^{604} & \\
 20^{627} & 8^{631} & 16^{619} & 20^{633} & 25^{620} & 24^{617} & 18^{607} & \\
 24^{622} & 17^{632} & 18^{623} & 20^{634} & 15^{611} & 27^{630} & 10^{606} & \\
 19^{629} & 16^{624} & 19^{610} & 37^{608} & 15^{616} & 16^{625} & 9^{602} & \\
 15^{642} & 1^{OTr} & 16^{628} & 9^{626} & 16^{637} & 10^{609} & 64^{603} & \\
 18^{627} & 16^{643} & 23^{627} & 18^{639} & 26^{600} & 20^{635} & 10^{640} & \\
 12^{614} & 63^{615} & 12^{636} & 11^{621} & 10^{644} & 14^{638} & 9^{641} &
 \end{array}$$

Tabelle IV.2. Das Taktsummenquadrat. Taktzahl^{BWV-Nummer}

Das Quadrat hat bei einer Gesamtsumme von 917 die Zeilen-, Spalten- und Diagonalenkonstante 131.

Dieser Palindromzahl, welche die gespiegelten Zahlen 13 und 31 enthält, begegnet man im *O=B* an verschiedenen Stellen, am auffälligsten wohl bei der Darstellung der 8er-Reihe und als Konstante beim weiter unten dargestellten Initialenquadrat der 164 Choräle.²⁷² Das dreimalige Repetieren des Chorales BWV 603 (= insgesamt 4 gespielte Strophen) und die Tatsache, dass *O Traurigkeit, o Herzeleid* als Fragment konzipiert werden musste, lässt, wie schon weiter oben angedeutet wurde, die Frage nach dem konzeptionellen Vorgehen Bachs aufkommen. Die Diskussion dieser Thematik soll im Anschluss an die Darstellung aller Quadrate und Reihen in der Schlussbetrachtung noch einmal aufgenommen werden.

272 Siehe Kapitel VI.4 *Die 8er-Reihe: Der Neuanfang in Christus*.

IV.2. Die Initialenquadrate

Die im Autograph sorgfältig eingetragenen Titel bieten sich mit ihren Initialen, gemäß Zahlenalphabet umgesetzt in Zahlen, für die Quadratbildung geradezu an.²⁷³ Die arithmetischen Grundlagen sind folgende:

- 164 geschriebene Titel mit 5 Doppeltiteln = insgesamt 169 (=13x13) geschriebene Titel.
- 49 komponierte Choraltitel incl. 2 Doppeltitel = 49 (7x7) komponierte Choraltitel.

Mit diesem Zahlenmaterial realisierte Bach ein weiteres Zahlenkonzept, wobei diesmal die Aufgabe nicht besonders schwierig war. Durch das Auftreten der immer wieder gleichen Initialen ergeben sich naturgemäß zahlreiche Dupla. Dadurch wird die Konstruktion von Quadraten erheblich erleichtert. Voraussetzung bleibt dabei dennoch immer, dass mit einer sinnvollen Quadratzahl eine stimmige Gesamtsumme der Summanden korrespondiert. Folgende Quadrate sind realisiert:

- Quadrat mit der Anzahl von 47 Initialen und 2 weiteren Initialen der Doppeltitel
- Quadrat mit der Anzahl von 164 Initialen und 5 weiteren Initialen der Doppeltitel

Das Initialenquadrat der 49 Choräle

Es stellt sich heraus, dass die Zählung der 49 Choraltitelinitialen (incl. der 2 Doppeltitel) die Konstruktion eines Quadrates mit der Wurzelzahl 7 ermöglicht:

Anzahl der Termen (= Initialen):	T =	49
Wurzelzahl:	W =	7
Alphabetsumme der 49 Initialen:	Σ =	455
Konstante: $455:7=65$	K =	65

In der folgenden Tabelle sind die Termennummern und die Nummern im O=B mit ihren entsprechenden Initialen sowie den Initialenvalores aufgeführt.

²⁷³ Bach verwendet im Orgelbüchlein das lateinisch-deutsche 24er-Zahlenalphabet einschließlich des w, wie es seit Christoph Rudolff bekannt ist und von Henning als *cabbala simplicissima* bezeichnet wird. Siehe Henning, S. 46 f.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Terminnummer
1	2a	2b	3a	3b	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Nummer im O=B
N	G	G	H	H	L	P	G	D	V	V	I	L	J	C	W	H	D	I	M	H	O	C	C	D	Initiale
13	7	7	8	8	11	15	7	4	20	20	9	11	9	3	21	8	4	9	12	8	14	3	3	4	Initialenvalor

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	Terminnummer
24	25	26	26a	27	28	29a	30	31	32	33	34	35a	35b	36	37	38	39	40	41*	42	43	44*	45	Nummer im O=B
O	W	H	O	C	J	C	E	E	H	K	H	L	L	D	V	D	E	I	A	W	W	A	A	Initiale
14	21	8	14	3	9	3	5	5	8	10	8	11	11	4	20	4	5	9	1	21	21	1	1	Initialenvalor

41* In dich hab ich gehoffet, Herr → *alio Modo*

44* Alle Menschen müssen sterben → *Alio modo*

14	3	8	15	3	8	14
21	3	8	5	7	1	20
5	9	8	7	21	11	4
3	10	11	11	8	9	13
8	11	4	4	21	8	9
9	9	12	20	4	7	4
5	20	14	3	1	21	1

Tabelle IV.3. Die Initialenvalores und das Initialenquadrat der 49 Choräle.

Das Initialenquadrat der 164 Choräle

Beim Rechnen mit der obgenannten Zahl 164 fragt man sich, weshalb Bach nicht die erheblich einfachere Zahl 169 zur Grundlage aller Rechenbemühungen gemacht hat, da bekanntlich 169 die Quadratzahl von 13 ist und somit die Bildung eines 13er-Quadrates ermöglichen würde. Weshalb Bach die Zahl 164 gewählt hat, wird im Exkurs bei *Ad maiorem Dei gloriam* untersucht. Die für die Zahl 169 fehlenden 5 Summanden lassen sich dennoch im O=B finden, und zwar in den Initialen der Doppeltitel zu den Chorälen 2 *Gott durch deine Güte oder Gottes Sohn ist komen*, 3 *Herr Christ der ein'ge Gottes Sohn oder Herr Gott nun sey gepreiset*, 46 *Spiritu(s) S. gratia od' des heilig Geistes reiche Gnad*, 162 *Hastu den Jesu dein Angesicht od Soll ich den Jesu* und 163 *Sey begrüßet Jesu gütig od O Jesu du edle Gabe*.

Tatsächlich ergibt sich nun in der Gesamtsumme der Alphabetszahlen aller 169 Initialen mit der Summe von 1703 eine Zahl, die durch die Wurzelzahl von 169, 13, teilbar ist:

FELIX PACHLATKO: DAS ORGEL-BÜCHLEIN VON JOHANN SEBASTIAN BACH

Anzahl der Termen (= Initialen): T = 169
 Wurzelzahl: W = 13
 Alphabetsumme der 169 Initialen: Σ = 1703
 Konstante: $1703:13=131$ K = 131

In der folgenden Tabelle sind die Nummern im $O=B$ mit ihren entsprechenden Initialen sowie den Initialenvalores aufgeführt.

1 2a 2b 3a 3b 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
 N G G H H L P L G D V V I L J C W H D I M H O
 13 7 7 8 8 11 15 11 7 4 20 20 9 11 9 3 21 8 4 9 12 8 14

22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44
 C C D O W H O O A O H N C J C E E H G N K K K
 3 3 4 14 21 8 14 14 1 14 8 13 3 9 3 5 5 8 7 13 10 10 10

45 46a 46b 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66
 N S D O O H L L G A D G M H E H O D M H W V C
 13 18 4 14 14 8 11 11 7 1 4 7 12 8 5 8 14 4 12 8 21 20 3

67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89
 A E J A A H A W W D E J G D I O W I N N W W W
 1 5 9 1 1 8 1 21 21 4 5 9 7 4 9 14 21 9 13 13 21 21 21

90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
 K I W V W W O I A M W A W F A A S A W K G W W
 10 9 21 20 21 21 14 9 1 12 21 1 21 6 1 1 18 1 21 10 7 21 21

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135
 W A E E E W W W W E L G D O W H M A A V N C H
 21 1 5 5 5 21 21 21 21 5 11 7 4 14 21 8 12 1 1 20 13 3 8

136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158
 A H M H M G A G I A I D C C W N D N L S G J A
 1 8 12 8 12 7 1 7 9 1 9 4 3 3 21 13 4 13 11 18 7 9 1

159 160 161 162a 162b 163a 163b 164
 A A A H S S O S
 1 1 1 8 18 18 14 18

7	7	11	11	15	11	7	4	13	7	9	20	9
14	8	8	4	9	12	4	21	3	3	21	3	21
8	14	21	1	14	21	13	7	9	3	14	1	5
5	8	8	13	10	8	11	13	14	14	10	10	7
12	21	7	8	4	21	7	5	1	14	8	11	12
21	20	3	8	1	7	1	21	18	1	21	5	4
4	21	8	5	8	1	14	9	13	13	3	21	11
10	9	21	20	21	14	1	9	1	12	4	1	8
6	1	1	18	1	5	21	21	21	21	4	1	10
5	5	21	1	21	5	14	9	3	4	14	21	8
20	1	12	20	13	9	3	1	9	8	12	12	11
1	9	1	21	13	9	21	3	8	13	4	7	21
18	7	9	1	1	8	14	8	18	18	7	18	4

Tabelle IV.4. Die Titelnummern, Initialen, Initialenvalores und das Initialenquadrat der 169 Choräle.

Es sei nochmals auf die Eigentümlichkeiten dieser in unserem Zusammenhang schon mehrfach in Erscheinung getretenen Zahl 131 hingewiesen:

- Sie ist sowohl ein Palindrom wie eine Primzahl und enthält im Schriftbild die Zahlen 13 und 31 (siehe Kapitel IV.1 und VI.4).
- Das Zahlenbild von 13×131 ergibt die regelmäßige Zahlenfolge 1, 3, 1, 3, 1.
- Die Zahl 131 ist ebenfalls Konstante des Taktsummenquadrates.

Dass die Zahl 1703 ein Hinweis darauf sein könnte, dass Bach in diesem Jahr das Orgelbüchlein begonnen hat, ist denkbar. *Beginnen* müsste dann wohl heißen, dass Bach mit der Planung begonnen hat.²⁷⁴ Die Verwendung von Papier für die Herstellung des Büchleins, das möglicherweise in Arnstadt hergestellt

274 Untersuchungen an Bachs c-Moll Sonate BWV 526 zeigen, dass im dritten Teil möglicherweise das Kompositionsjahr 1727 erwähnt ist: siehe Albert Clements Aufsatz 'Zur rhythmischen Ausführung des dritten Satzes der Sonate e-Moll BWV 528 von J.S. Bach', *Ars Organi* 38/2 (1990), S. 75–83, hier 75–76. Die Art und Weise, in der die Zahlen 17 und 27 in BWV 526 zwischen 27 (J.S.) und 14 (Bach) gestellt sind, erinnert wiederum an die Lage in Dürers Quadrat, wo sich die Zahlen 15 und 14 zwischen 4 (D) und 1 (A) finden lassen (Clement, ebda, S. 76).

wurde, könnte dafür sprechen.²⁷⁵ Auch hatte Bach mit der Bestallung in Arnstadt eine Perspektive für ein so großes Projekt. Dass bis zum ersten Eintrag in das Büchlein mehrere Jahre verstrichen, wäre immerhin mit der außerordentlichen Komplexität der Planungsaufgabe zu begründen. Vorläufig muss dies alles jedoch Vermutung bleiben.

IV.3. Das Positionenquadrat

Das Zahlenmaterial zu dem folgenden Quadrat ergibt sich aus den Stellungennummern der ausgeführten 49 Choralstrophen innerhalb der 164 betitelten und rastrierten Choräle.²⁷⁶ Bezüglich der Stellung von Vers 2 und 3 von BWV 627 steht die Frage im Raum, wie diese zu zählen sind. Da eine Stellung prinzipiell nur einmal vergeben werden kann – analog der Seitenzahlen –, können die genannten Verse nur die Stellung 0 haben. Damit ergibt sich ein einziges Duplum 0.

Dieses Quadrat ist im gegebenen Kontext zweifellos eines der interessantesten. Zum einen ist es infolge Auftretens von nur einem Duplum nahezu perfekt, zum andern ist seine Konstruktion wegen der komplizierten Reihung seiner Summanden besonders anspruchsvoll. Zudem setzt es die numerische Position jedes einzelnen der 49 Choräle in der Reihe der 164 Choräle zum voraus fest. Neben der grundsätzlichen Bedeutung, die das Positionenquadrat für die Beurteilung des $O=B$ hat, werden auch zwei Details erhellt, die bis anhin nicht erklärt werden konnten. So wird deutlich, weshalb Bach bei den beiden Vorspielen BWV 640 und 643 jeweils die *alio modo*-Variante komponierte und nicht die Titelvariante.²⁷⁷

Anzahl der Termen (= Positionsnummern):	T =	49
Wurzelzahl:	W =	7
Summe der 49 Positionsnummern:	Σ =	1785
Konstante: $1785:7 = 255$	K =	255

In der folgenden Tabelle sind die Nummer im $O=B$, die Positionsnummern sowie die entsprechenden Initialen aufgeführt.

275 Siehe Fußnote 181.

276 Es sind die Verse 2 und 3 von BWV 627 einzeln mitgerechnet, analog zur Taktsummenzählung im Taktsummenquadrat, wie es weiter oben beschrieben ist.

277 Im Falle von BWV 640 stützen auch die Initialenquadrate diese Begründung.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17	Nummer in "45 Choräle"
1 2 3 4 5 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	Position in "164 Choräle"
N G H L P G D V V I L J C W H D I	Initialen
18 19 20 21 22 23 24 25 26 26a 27 28 29a 29b 29c 30	Nummer in "45 Choräle"
19 20 21 22 23 24 25 26 27 29 34 35 36 0* 0* 37	Position in "164 Choräle"
M H O C C D O W H O C J C W A E	Initialen
31 32 33 34 35a 35b 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45	Nummer in "45 Choräle"
38 39 44 49 50 51 61 65 76 77 91 98 100 113 131 159	Position in "164 Choräle"
E H K H L L D V D E I A W W A A	Initialen

27 16 1 9 76 61 65
77 18 131 2 10 17 0
24 25 12 39 4 100 51
3 26 15 113 50 35 13
91 11 37 38 49 8 21
14 0 36 34 44 29 98
19 159 23 20 22 5 7

Tabelle IV.5. Die Positionszahlen und das Positionenquadrat der 49 Choräle.

IV.4. Das Seitenzahlenquadrat

Grundlage dieses Quadrates sind die Seitenzahlen aller komponierter Choralstrophen, also inklusive der drei Verse von *Christ ist erstanden* und des Fragments von *O Traurigkeit, o Herzeleid*. Es spielt dabei keine Rolle, ob die Seitenzählung mit 182 oder 184 Seiten berücksichtigt wird, weil diese Frage für die Konstruktion des Quadrates nicht erheblich ist. Gezählt wurde hier aber nicht mit der im Autograph vorhandenen Paginierung (sie ist von fremder Hand), sondern mit der Zählung beim Titelblatt beginnend:

Anzahl der Termen (= Seitennummern): T = 49
 Wurzelzahl: W = 7
 Summe der 49 Seitennummern: Σ = 2247
 Konstante: $2247:7=321$ K = 321

1 2 3 4 5 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	Nummer in "164 Choräle"
N G H L P G D V V I L J C W H D I	Initialen
3 4 6 7 8 10 11 12 13 14 16 17 18 19 20 21 22	Seitenzahl

19 20 21 22 23 24 25 26 27 29 34 35 36a36b36c 37	Nummer in "164 Choräle"
M H O C C D O W H O C J C W A E	Initialen
24 25 26 27 28 29 30 32 33 35 41 42 43 44 45 46	Seitenzahl

38 39 44 49 50 51 61 65 76 77 91 98 100 113 131 159	Nummer in "164 Choräle"
E H K H L L D V D E I A W W A A	Initialen
47 48 56 61 62 63 75 80 91 92 108 115 117 131 151 179	Seitenzahl

80 91 21 56 41 28 4
 42 3 20 25 63 17 151
 75 35 26 45 115 12 13
 44 11 6 117 32 92 19
 46 108 22 61 14 8 62
 18 30 179 10 27 33 24
 16 43 47 7 29 131 48

Tabelle IV.6. Die Seitenzahlen und das Seitenzahlenquadrat der 49 Choräle.

Dieses Quadrat ist das einzige Exemplar im $O=B$, das im strengen Sinne vollmagisch ist, das heißt, es gibt keine Dupla. Nach heutigem Kenntnisstand ist es überhaupt das erste bekannte von Bach konstruierte perfekte Magische Quadrat. Die Vermutung ist allerdings angebracht, dass weitere Exemplare noch der Entdeckung harren.

Das Seitenzahlenquadrat war nicht einfach zu rekonstruieren. Erschwerend bei der (Re-)Konstruktion ist nämlich der Umstand, dass die verwendeten Zahlen keine regelmäßige Abfolge haben. Dies schränkt die Anzahl der möglichen Lösungen stark ein. Interessant sind die Tatsachen, dass zum einen die Konstante eine Ziffernfolge (3.2.1.) ist und zum andern die Zentrumszahl (117) den Faktor 13 ($117=9 \times 13$) enthält. Der Zahlenkomplex 13-31-131-313

ist nicht nur in den weiter oben beschriebenen Quadraten in Erscheinung getreten, sondern wird sich noch markant im Kapitel VI.4 zeigen.

IV.5. Die Bewertung der Magischen Quadrate

Die Bewertung der *Initialenquadrate* muss ihrer Anlage und ihrem Kontext entsprechend unterschiedlich und differenziert erfolgen. Den Initialenquadraten gemein ist die Tatsache, dass das zugrunde liegende Zahlenmaterial aus einem kleinen Zahlenspektrum besteht (Alphabetzahlen 1–24) und die Quadrate deshalb zahlreiche Dupla aufweisen. Dies bedeutet, dass sie die strengen mathematischen Bedingungen für die Konstruktion von Magischen Quadraten nicht erfüllen und einfach zu konstruieren sind.

Es darf dabei jedoch nicht übersehen werden, dass die Initialenquadrate mit den übrigen Quadraten ein Netz bilden, in das sie ineinandergreifend eingebunden sind. Daraus folgt, dass die Konstruktion der Grundbedingungen für die Bildung dieser Quadrate sehr anspruchsvoll war. Nicht nur die Quadratzahlen hängen nämlich von der Gesamtkonstruktion ab, sondern auch die Gesamtsummen der jeweiligen Summanden und ihre entsprechende Teilbarkeit durch die Wurzelzahlen. Eine Differenz von nur einem Zähler bei einem der vielen Summanden, würde die Konstruktion zerstören. Dabei ist es völlig gleichgültig, ob die Quadrate im *magischen* Sinn wertvoll sind oder nicht. So erweisen sich nicht in erster Linie die einzelnen Quadrate als wertvoll, sondern die Gesamtkonstruktion. Diese Gesamtkonstruktion erforderte eine sorgfältige vorausgehende Planung, die dann im Verlaufe der Realisierung nicht mehr veränderbar war. Die Konsequenzen für die Beurteilung des $O=B$ sind einschneidend. Folgende Details sind zu beachten:

1. Das 49er-*Initialenquadrat* klärt mit dem *Positionenquadrat* zusammen die Frage, weshalb Bach bei BWV 640 und 643 nur die *alio modo*-Version komponiert hat.
2. Ebenfalls geklärt ist damit die Frage, weshalb er bei der zweiten Version von *Liebster Jesu, wir sind hier* nicht die Bezeichnung *alio Modo* verwendet hat.
3. Bei der Frage nach der Beurteilung der Qualität des *Taktsummenquadrates* dürfen zwei Faktoren nicht übersehen werden: als Negativum sicher die

Tatsache, dass auch hier zahlreiche Dupla vorkommen und eine mögliche notwendige Gesamtsumme in jedem Fall erreicht werden kann, als Positivum, dass das Zahlenspektrum mit zwei Zahlen über 60 und einer 1 sehr groß ist. Dies macht die Erfüllung der Vorgaben doch kompliziert. Dass die Konstruktion auch dieses Quadrates der Planung bedurfte, ergibt sich aus seiner direkten Abhängigkeit von der Konstruktion des Goldenen Schnittes, siehe Kapitel VII.2. Im Weiteren überschneiden sich seine Parameter mit denjenigen der Rastrierungsstruktur.²⁷⁸

4. Das *Positionen-* und das *Seitenzahlenquadrat* sind die qualitativ besten Quadrate im $O=B$. Das Positionenquadrat hat ein einziges Duplum, während das Seitenzahlenquadrat gar das einzige perfekte und wirklich *magische* Quadrat im $O=B$ ist. Auch ihre Konstruktion muss schon in einer frühen Phase der Planung beabsichtigt gewesen sein, denn eine Änderung war im Nachhinein nicht mehr möglich, weil beide Quadrate direkt mit den anderen Quadratkonstruktionen verknüpft sind. Auch war die einmal festgelegte Position und die damit verbundene Seitenzahl nachträglich nicht mehr veränderbar.

Die Konsequenzen auf das Ganze gesehen sind folgende:

- Es ist offensichtlich, dass Bach von Anfang an für das $O=B$ von mindestens zwei Gesamtsummen der komponierten Choräle ausgegangen ist, nämlich von 45 und 49 Chorälen.²⁷⁹
- Die ganze Anlage muss im Vorfeld des Arbeitsbeginns weitestgehend geplant worden sein. Eine fließende Planung, wie wir dies bei Bach später immer wieder beobachten können, war nicht mehr möglich. Eine Ausnahme bildet möglicherweise die Planung der Rastrierung.²⁸⁰
- *O Traurigkeit, o Herzeleid* musste Fragment bleiben.
- Es muss von der Ansicht Abschied genommen werden, dass das $O=B$ ein Torso, das heißt, unvollendet sei.

278 Siehe Kapitel VIII *Die Rastrierung*.

279 Im Kapitel VII *Die Mitte und der Goldene Schnitt* wird noch die Möglichkeit erörtert, ob Bach für die Konstruktion dieses Parameters von den 48 vollständig komponierten Versen ausgegangen sein könnte, also ohne Einbezug des Fragmentes *O Traurigkeit, o Herzeleid*.

280 Siehe Kapitel VIII *Die Rastrierung*.